Technische Universität München

Institute of Flight System Dynamics

Practice Exam Control Systems – SOLUTION

Examiner: Prof. Dr.-Ing. Florian Holzapfel

July 26, 2020

Name:	
Matriculation Number:	
Room:	
Seat:	
ID Check:	

Exam
Time 1hr

Hinweise zur Prüfung Control Systems Exam:

Die *Operatoren*, die in den Prüfungsaufgaben vorkommen, finden Sie in der folgenden Tabelle. Bitte beachten Sie diese bei der Bearbeitung der Aufgaben.

nennen	ohne nähere Erläuterungen aufzählen; zielgerichtet Informationen zusammentragen, ohne diese zu bewerten
darstellen, wiedergeben	Zusammenhänge, Probleme, Inhalte unter einer bestimmten Fragestellung sachbezogen ausführen; Strukturen, Situationen objektiv abbilden
beschreiben	genaue, eingehende, sachliche, auf Erklärung und Wertung verzichtende Darstellung von Personen, Situationen, Vorgängen (evtl. mit Materialbezug)
begründen	einen Sachverhalt bzw. eine Aussage durch nachvollziehbare Argumente stützen
erläutern, erklären	Materialien, Sachverhalte oder Thesen ggf. mit zusätzlichen Informationen und Beispielen verdeutlichen, in einen Zusammenhang einordnen und begründen
überprüfen	eine Textaussage, These, Argumentation, ein Analyseergebnis, einen Sachverhalt auf der Grundlage eigener Kenntnisse, Einsichten und Textkenntnis auf ihre/seine Angemessenheit hin untersuchen und zu Ergebnissen kommen
interpretieren	auf der Grundlage einer Analyse Sinnzusammenhänge aus Materialien methodisch reflektiert erschließen, um zu einer schlüssigen Gesamtauslegung zu gelangen
diskutieren	zu einer Problemstellung oder These eine Argumentation entwickeln, die zu einer begründeten Bewertung führt
erschließen, herausarbeiten	aus Materialien bestimmte Sachverhalte herleiten, die nicht explizit genannt werden

Table 1: Quelle: Kultusministerkonferenz

Viel Erfolg!

Notes for the Exam in Control Systems:

The *operators* used in the exam can be found in the following table. Please consider them when editing the tasks.

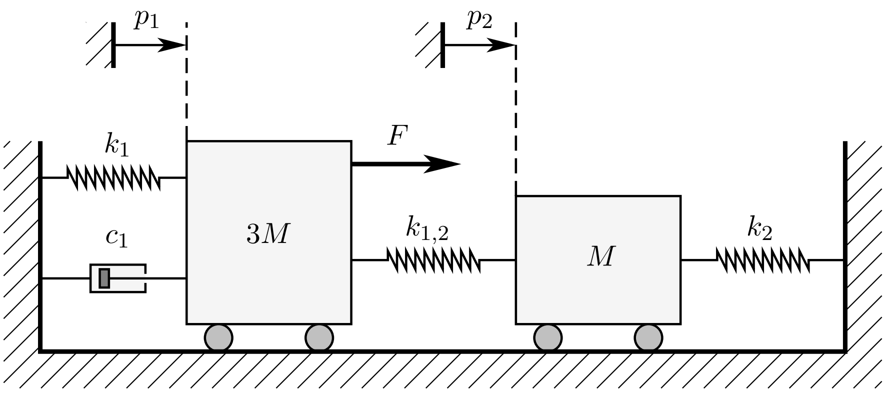
name	to mention or identify by name
present	(re-)structure and write down
justify	support a fact or a statement with reasonable arguments
describe	give an accurate account of sth.
show, illustrate	use examples to explain or make clear
explain	describe and define the causes
assess, evaluate	consider in a balanced way the points for and against sth.
interpret	make clear the meaning of sth. and give your own views on it
discuss	investigate or examine by argument; give reasons for and against

Table 2: Source: Kultusministerkonferenz

Much Success!

Aufgabe/ Task 1: **Modellbildung/ Modeling** *(ca. 8 Punkte/points)*

Betrachtet werden zwei reibungslos gelagerte Wagen mit den Massen $3M$ und M. Der erste Wagen ist mit einer Feder der Steifigkeit k_1 und einem Dämpfer mit dem Dämpfungskoeffizienten c_1 mit der linken Wand verbunden, der zweite Wagen ist durch eine Feder mit der Steifigkeit k_2 mit der rechten Wand verbunden. Der linke Wagen wird durch eine externe Kraft F angeregt. Zusätzlich sind beide Wagen durch eine Feder mit der Steifigkeit $k_{1,2}$ miteinander verbunden. In der Ruhelage $p_1 = p_2 = 0$ sind alle Federn entspannt. Zudem werden alle Federn und Dämpfer als masselos angenommen.



Consider two frictionless carts with the masses $3M$ and M. The first cart is connected to the left wall by a spring with the stiffness k_1 and a damper with the damping coefficient c_1, the second cart is connected to the right wall by a spring with the stiffness k_2. The left cart is excited by an external force F. Additionally, both carts are coupled with a spring with a stiffness of $k_{1,2}$. In the equilibrium position $p_1 = p_2 = 0$ all springs are tension-free. All springs and dampers are considered massless.

a) Stellen Sie mithilfe des Impulssatzes die Bewegungsdifferentialgleichung für den ersten Wagen in der Form $\ddot{p}_1 = f(p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, F)$ auf.

Use the Newton's second law to derive the equations of motion of the first cart in the form $\ddot{p}_1 = f(p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, F)$. *(ca. 2 Punkte/points)*

$$3M \cdot \ddot{p}_1 = F - k_1 \cdot p_1 - c_1 \cdot \dot{p}_1 + k_{1,2} \cdot (p_2 - p_1)$$

$$\ddot{p}_1 = \frac{1}{3M} \left[-(k_1 + k_{1,2}) \cdot p_1 - c_1 \cdot \dot{p}_1 + k_{1,2} \cdot p_2 + F \right]$$

b) Stellen Sie mithilfe des Impulssatzes die Bewegungsdifferentialgleichung für den zweiten Wagen in der Form $\ddot{p}_2 = f(p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, F)$ auf.

Use Newton's second law to derive the equations of motion of the second cart in the form $\ddot{p}_2 = f(p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, F)$. *(ca. 2 Punkte/points)*

$$M \cdot \ddot{p}_2 = k_{1,2} \cdot (p_1 - p_2) - k_2 \cdot p_2$$

$$\ddot{p}_2 = \frac{1}{M} \left[k_{1,2} \cdot p_1 - (k_2 + k_{1,2}) \cdot p_2\right]$$

c) Stellen Sie ein Zustandsraummodell in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ auf. Der Eingang u ist die externe Kraft F und als Ausgang y soll der Abstand $p_2 - p_1$ betrachtet werden. Verwenden Sie den Zustandsvektor $\mathbf{x} = \left[p_1\ \dot{p}_1\ p_2\ \dot{p}_2\right]^T$.

Derive a state space model of the form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$, $y = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. The input u is the external force F and the distance $p_2 - p_1$ shall be considered as output signal y. Use the state vector $\mathbf{x} = \left[p_1\ \dot{p}_1\ p_2\ \dot{p}_2\right]^T$. *(ca. 4 Punkte/points)*

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \ddot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \ddot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_{1,2}}{3M} & -\frac{c_1}{3M} & \frac{k_{1,2}}{3M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{1,2}}{M} & 0 & -\frac{k_2+k_{1,2}}{M} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ \dot{p}_1 \\ p_2 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

$$y = p_2 - p_1 = \left[-1\ 0\ 1\ 0\right] \cdot \left[p_1\ \dot{p}_1\ p_2\ \dot{p}_2\right]^T$$

Aufgabe/ Task 2: **Linearization / Linearisierung** *(ca. 2 Punkte/points)*

a) Erklären Sie das Prinzip der Trimmung und Linearisierung eines dynamischen Systems und begründen Sie deren Notwendigkeit.

Explain the concept of trimming and linearization of a dynamic system and its necessity *(ca. 1 Punkt/point)*

Concept: by trim we mean the equilibrium condition(s) the system is in, and by linearization , we mean approximation of the non-linear system as a linear system at this equilibrium condition (0.5P)
Relevance: Nonlinear systems are harder to analyze in comparison to linear systems (0.5P)

b) Gegegeben ist das folgende, dynamische System $\dot{x} = f(x)$. Geben sie die Bedingung für $f(x)$ an, so dass das dynamische System linear ist.

The following dynamic system $\dot{x} = f(x)$ is given. Write down the condition on $f(x)$, such that the dynamic system is linear. *(ca. 1 Punkt/point)*

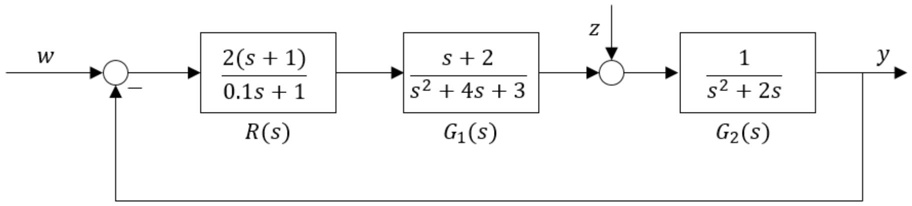
$$f(k(x_1 + x_2)) = f(x_1)k + f(x_2)k$$

(1P)

Aufgabe/ Task 3: **Stationäre Genauigkeit/ Steady-state accuracy** *(ca. 3 Punkte/points)*

Gegeben ist der folgende, stabile geschlossene Regelkreis:

The following stable, closed-loop system is given:



a) Beurteilen Sie die stationäre Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises bezüglich des Führungsverhaltens (Führungsgröße: w) für eine Sprungeingabe in w und begründen Sie Ihre Aussage:

Evaluate the steady-state accuracy of the closed-loop system with regard to the reference behavior of the control loop (reference variable: w) assuming a step input in w and justify your statement: *(ca. 1 Punkt/point)*

Integrator-Element in $R(s)G_1(s)G_2(s)$ and stable open-loop system $\Rightarrow$ system is stationary accurate with regard to w.

b) Beurteilen Sie die stationäre Genauigkeit des geschlossenen Regelkreises bezüglich des Störverhaltens (Störgröße: z) für eine Sprungeingabe in z und begründen Sie Ihre Aussage.

Evaluate the steady-state accuracy of the closed-loop system with regard to the disturbance behavior of the control loop (disturbance variable: z) assuming a step input in z and justify your statement. *(ca. 1 Punkt/point)*

No Integrator-Element in $R_1(s)G_1(s)$ between tracking error and disturbance input

c) Um welchen Typ von Regler $R(s)$ handelt es sich? Unterscheiden Sie gegebenenfalls zwischen idealer und realer Ausführung.

What type of the controller $R(s)$ is used? If necessary, distinguish between ideal and real implementation. *(ca. 1 Punkt/point)*

Real PD-Controller

Aufgabe/ Task 4: **Laplace-Transformation/ Laplace transformation** *(ca. 11 Punkte/points)*

Ein System sei durch die Differentialgleichung

$$3\ddot{y}(t) + 9\dot{y} = 4\dot{u}(t) + 3u(t)$$

gegeben. Das System wird aus dem Anfangszustand $y(-0) = 0, \dot{y}(-0) = 7$ mit einem Dirac-Impuls $u(t) = \delta(t)$, $u(-0) = 0$ angeregt.

Dabei gilt folgende Notation:

- $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = x(-0)$ für $t < 0$ und $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = x(+0)$ für $t > 0$

Folgende Laplace-Transformationen $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ sind gegeben:

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\mathscr{L}\{b\, e^{-at}\} = \frac{b}{s+a}$$

$$\mathscr{L}\{1 - e^{-at}\} = \frac{a}{s(s+a)}$$

A dynamical system is defined by the following differential equation:

$$3\ddot{y}(t) + 9\dot{y} = 4\dot{u}(t) + 3u(t)$$

The system is excited by a dirac-impulse $u(t) = \delta(t)$, $u(-0) = 0$ from its initial value $y(-0) = 0, \dot{y}(-0) = 7$.

The following notation is applied:

- $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = x(-0)$ for $t < 0$ and $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = x(+0)$ for $t > 0$

The following Laplace-Transformations $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ are given:

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\mathscr{L}\{b\, e^{-at}\} = \frac{b}{s+a}$$

$$\mathscr{L}\{1 - e^{-at})\} = \frac{a}{s(s+a)}$$

a) Bestimmen Sie den Verlauf des Ausgangssignals $y(t)$ für $t > 0$.
Hinweis: Eine Partialbruchzerlegung ist nicht notwendig.

Determine the output response $y(t)$ for $t > 0$.
Remark: Partial fraction decomposition is not necessary.
(ca. 10 Punkte/points)

$3(s^2Y(s) - sy(-0) - \dot{y}(-0)) + 9(sY(s) - y(-0)) = 4(s\,U(s) - u(-0)) + 3U(s)$ (2 Points)

$Y(s)(3s^2) - 21 + Y(s)9s = (4s+3)U(s)$

$Y(s)(3s^2 + 9s) = (4s+3)U(s) + 21$ (1 Point)

With $\mathscr{L}\{u(t) = \delta(t)\} = 1$, we get (1 Point)

$Y(s) = \frac{4s+3}{3s^2+9s} + \frac{21}{3s^2+9s}$ (1 Point)

$Y(s) = \frac{4s}{3s^2+9s} + \frac{3}{3s^2+9s} + \frac{21}{3s^2+9s}$

$Y(s) = \frac{\frac{4}{3}}{s+3} + \frac{1}{s(s+3)} + \frac{7}{s(s+3)}$

$Y(s) = \frac{\frac{4}{3}}{s+3} + \frac{8}{s(s+3)}$

$Y(s) = \frac{\frac{4}{3}}{s+3} + \frac{8}{3}\frac{3}{s(s+3)}$ (3 Points)

Laplace-Transformation: $\bullet\!\!-\!\!\circ$

$y(t) = \frac{4}{3}\,e^{-3t} + \frac{8}{3}(1 - e^{-3t}) = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}e^{-3t}$ (2 Points)

b) Begründen Sie, ob das System Ein-/Ausgangsstabilität aufweist.

Evaluate, if the system is BIBO (bounded-input-bounded-output) stable. *(ca. 1 Punkt/point)*

System is not BIBO stable, since pole at zero exists (1 point)

Aufgabe/ Task 5: **Bode-Diagramm/ Bode diagram** *(ca. 10 Punkte/points)*

Die Übertragungsfunktion eines Systems kann durch die Reihenschaltung der beiden Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ dargestellt werden:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

Im nachfolgenden Diagram sind bereits die Approximationen des Amplituden- und Phasengangs des Elements $G_1(s)$ eingezeichnet. Die Übertragungsfunktion von $G_2(s)$ lautet:

$$G_2(s) = \frac{20s + 4000}{(s + 20)^2}$$

The transfer function of a dynamic system can be represented by the series connection of the two transfer functions $G_1(s)$ and $G_2(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

The following diagram contains the approximation of the magnitude and phase response curves for the element $G_1(s)$. The transfer function of $G_2(s)$ is:

$$G_2(s) = \frac{20s + 4000}{(s + 20)^2}$$

a) Bestimmen Sie die Eckfrequenzen von $G_2(s)$, sowie Näherungswerte für den Startwert $|G_2(\omega_{min})|$ und die Anfangssteigung $|G_2(\omega_{min})|'$ des Amplitudengangs in dB bzw. dB/Dekade und den Startwert des Phasengangs $\angle G_2(\omega_{min})$.

Determine the corner frequencies of $G_2(s)$ as well as approximations of the initial value $|G_2(\omega_{min})|$ and gradient $|G_2(\omega_{min})|'$ of the magnitude response in dB and dB/decade and the initial value of the phase response $\angle G_2(\omega_{min})$.

(ca. 4 Punkte/points)

Hinweis / Hint: $\omega_{min} = 10^{-1}$ rad/s

Corner frequencies:

$$G_2(s) = \frac{20s + 4000}{(s+20)^2} = 10\frac{s/200 + 1}{(s/20+1)^2}$$

$$\tilde{T}_1 = \frac{1}{200}\text{ s} \Rightarrow \tilde{\omega}_1 = \frac{1}{|\tilde{T}_1|} = 200 \text{ rad/s}$$

$$T_{1,2} = \frac{1}{20}\text{ s} \Rightarrow \omega_{1,2} = \frac{1}{|T_{1,2}|} = 20 \text{ rad/s}$$

Gain $K = 10$, no poles or zeros at 0:

$$\Rightarrow |G_2(\omega_{min})| \approx 20 \cdot \log_{10}(10) = 20 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow |G_2(\omega_{min})|' \approx 0 \text{ dB/decade}$$

$$\Rightarrow \angle G_2(\omega_{min}) \approx 0^\circ$$

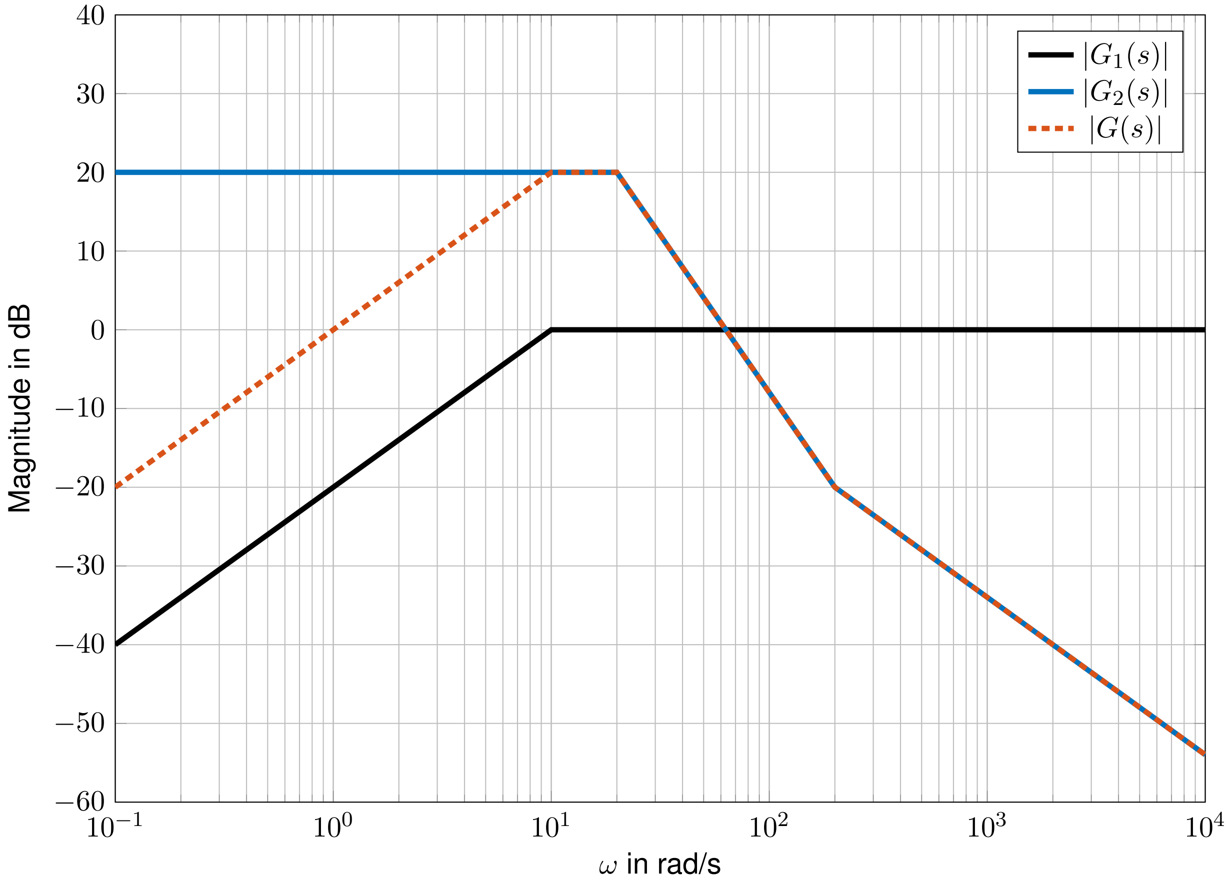
b) Zeichnen Sie den angenäherten Verlauf des Amplituden- und Phasengangs von $G_2(s)$ in das Diagram auf der nächsten Seite.

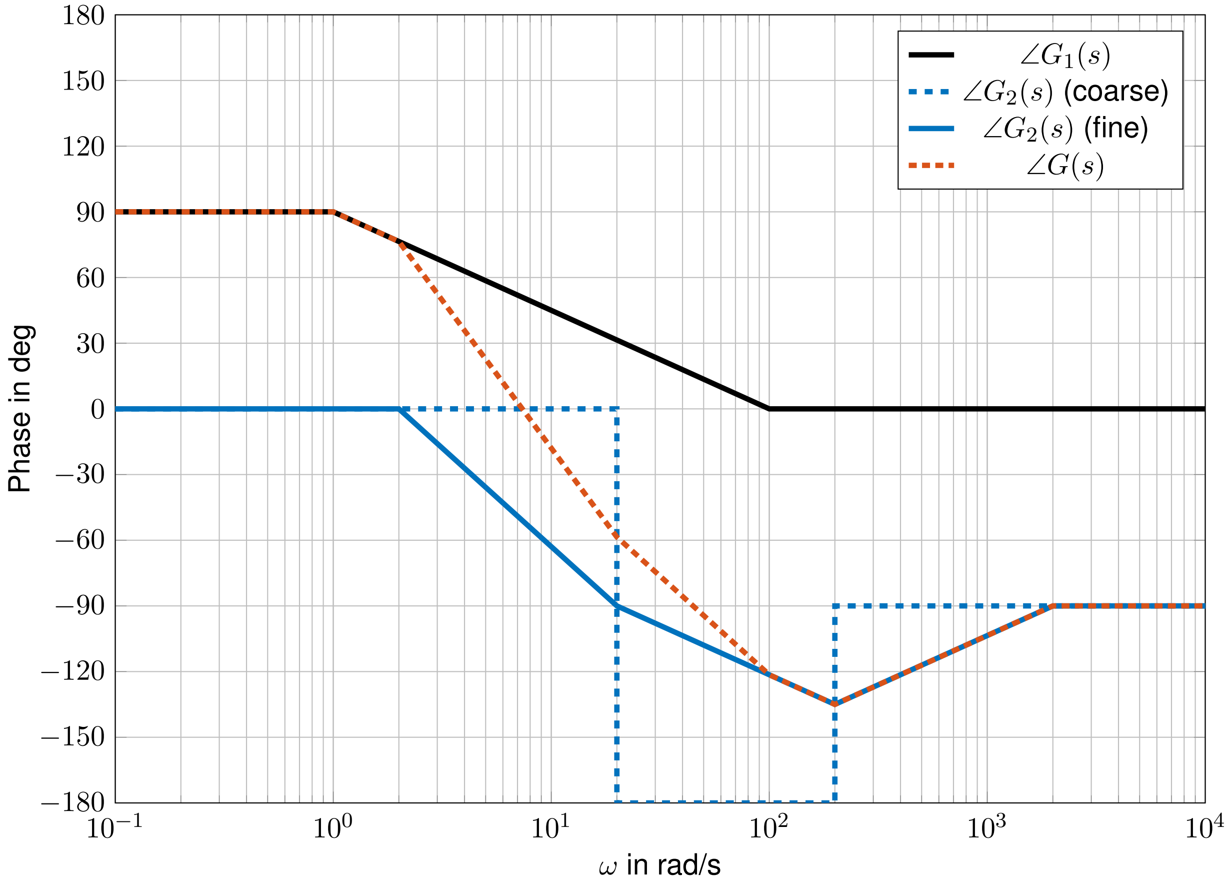
Draw the approximation of the magnitude and phase response curves of $G_2(s)$ to the diagram on the next page.

(ca. 4 Punkte/points)

c) Zeichnen Sie anschließend den angenäherten Verlauf des Amplituden- und Phasengangs des Gesamtsystems $G(s)$ in das Diagram auf der nächsten Seite.

Finally, draw the approximation of the magnitude and phase response curves of the entire system $G(s)$ to the diagram on the next page. *(ca. 2 Punkte/points)*


$|G_1(s)|$
$|G_2(s)|$
$|G(s)|$
Magnitude in dB
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
ω in rad/s


$\angle G_1(s)$
$\angle G_2(s)$ (coarse)
$\angle G_2(s)$ (fine)
$\angle G(s)$
Phase in deg
180
150
120
90
60
30
0
-30
-60
-90
-120
-150
-180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
ω in rad/s

Aufgabe/ Task 6: **Nyquist-Kriterium/ Nyquist Criterion**

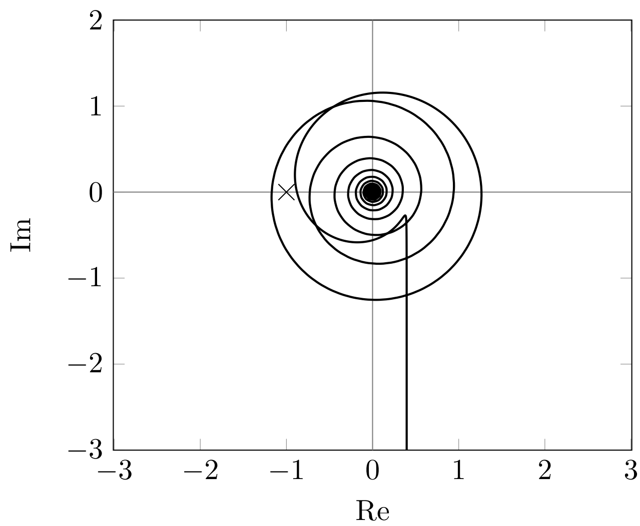
Die folgende Abbildung zeigt die Ortskurve $G(j\omega)$ des offenen Kreises $G(s)$ für alle relevanten Frequenzen $\omega > 0$. Die Stabilität des geschlossenen Kreises soll mit dem allgemeinen Nyquist-Kriterium untersucht werden.

- Berechnen Sie Winkeländerung des Fahrstrahls W_+^*, die für die Stabilität des geschlossenen Kreises erforderlich ist.
- Ermitteln Sie die tatsächliche Winkeländerung des Fahrstrahls W_+.
- Beurteilen Sie die Stabilität des geschlossenen Kreises.

The following plot shows the open-loop frequency response $G(j\omega)$ of the system $G(s)$ for all relevant frequencies $\omega > 0$. The closed-loop stability shall be assessed using the general Nyquist criterion.

- Calculate the argument change W_+^* required for closed-loop stability.
- Determine the actual argument change W_+.
- Determine the stability of the closed-loop system.

$$G(s) = 220\,\exp(-s)\frac{(s+0.05)\,(s-1)}{s\,(s+10)^2\,(s-5)}$$



(ca. 3 Punkte/points)

- one pole in zero, one unstable pole $\Rightarrow$ $W_+^* = 1\frac{\pi}{2} + 1\pi = \frac{3\pi}{2}$ (1P)
- from plot: $W_+ = -\frac{3\pi}{2}$ (1P)
- $W_+ \neq W_+^*$ $\Rightarrow$ closed-loop system *unstable* (1P)
- *NOTE: alternative solution considering* $\omega \in [-\infty, \infty]$*:* $W_+^* = 3\pi \neq -3\pi = W_+$

Aufgabe/ Task 7: **Zustandsrückführung/ State Feedback** *(ca. 7 Punkte/points)*

Betrachtet wird das folgende System mit Zustandsvektor $\mathbf{x}$, Stellgröße u und Ausgangssignal y:

Consider the following system with state vector $\mathbf{x}$, control input u and output signal y:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^\mathsf{T}} \mathbf{x}$$

a) Berechnen Sie die Rückführverstärkung $\mathbf{r}$ des folgenden Regelgesetzes, sodass die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises in $\lambda_{R,1}, \lambda_{R,2}$ liegen.

Calculate the feedback gain $\mathbf{r}$ of the following control law such that the closed-loop eigenvalues become $\lambda_{R,1}, \lambda_{R,2}$.

$$u = -\mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda_{R,1} = -2, \quad \lambda_{R,2} = -3$$

(ca. 3 Punkte/points)

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2]^\mathsf{T}$$

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{r}^\mathsf{T} \qquad \text{(0.5P)}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_R) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1-r_1 & s-r_2+1 \end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_R) = s^2 + (2-r_2)s + (2-r_2-r_1) \qquad \text{(1P)}$$

$$\overset{!}{=} \prod_k (s - \lambda_{R,k}) = s^2 + 5s + 6 \qquad \text{(0.5P)}$$

$$(2-r_2) = 5 \quad \Rightarrow \quad r_2 = -3$$

$$(2-r_2-r_1) = 6 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -1$$

$$\Rightarrow \mathbf{r} = [-1, -3]^\mathsf{T} \qquad \text{(1P)}$$

b) Das Ausgangssignal y soll stationär genau der Führungsgröße w folgen. Berechnen Sie dazu den Parameter m_u des folgenden Regelgesetzes.

The output signal y shall track the reference signal w with steady-state accuracy. Calculate the corresponding parameter m_u of the following control law.

$$u = -\mathbf{r}^\mathsf{T}\,\mathbf{x} + m_u\,w, \qquad m_u \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{r} = [-4, -2]^\mathsf{T}$$

(ca. 4 Punkte/points)

$$\mathbf{A}_w = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{r}^\mathsf{T}$$

$$\mathbf{b}_w = \mathbf{b}\,m_u$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 5 & s+3 \end{bmatrix} \qquad \text{(1P)}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w)^{-1} = \frac{1}{s^2+4s+8}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -5 & s+1 \end{bmatrix} \qquad \text{(1P)}$$

$$G_{yw}(s) = \mathbf{c}^\mathsf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w)^{-1}\mathbf{b}_w = \frac{-5\,m_u}{s^2+4s+8} \qquad \text{(1P)}$$

$$1 \overset{!}{=} \lim_{s\to 0} G_{yw}(s) = -\frac{5}{8}m_u \qquad \text{(0.5P)}$$

$$\Rightarrow m_u = -\frac{8}{5} \qquad \text{(0.5P)}$$

Aufgabe/ Task 8: **Zustandsbeobachter/State observer** *(ca. 5 Punkte/points)*

Gegeben sei das System Σ. Um seinen Zustand $\boldsymbol{x}$ zu schätzen, wird ein Beobachter L eingesetzt. Der Schätzfehler $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist definiert als $\tilde{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$.

System Σ:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$y = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}$$

Beobachter L:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{l}(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}$$

The system Σ is given. To estimate the state $\boldsymbol{x}$, a state observer L is used. The estimation error $\tilde{\boldsymbol{x}}$ is defined as $\tilde{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$.

System Σ:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$y = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}$$

Observer L:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{l}(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = \boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}$$

a) Leiten Sie die Differentialgleichung $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}$ für die Schätzfehlerdynamik her:

Derive the differential equation for the estimation error dynamics $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}$: *(ca. 2 Punkte/points)*

$$\tilde{x} := x - \hat{x} \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A\left(x - \hat{x}\right) + lc^T\left(x - \hat{x}\right) = \underbrace{\left(A + lc^T\right)}_{\tilde{A}}\tilde{x}$$

Nun sind die folgenden Werte gegeben:

The following is given:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Matrix $\tilde{\boldsymbol{A}}$ und geben Sie ihre Eigenwerte an.
Calculate the Matrix $\tilde{\boldsymbol{A}}$ and calculate its eigenvalues. *(ca. 2 Punkte/points)*

$$\tilde{A} = (A + lc^T) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2$

c) Verschwindet der Schätzfehler für $t \to \infty$? Begründen Sie Ihre Aussage.
Does the estimation error vanish for $t \to \infty$? Justify your answer. *(ca. 1 Punkt/point)*

$$\tilde{x} \to 0, Re(\lambda_{1,2}) < 0$$

Aufgabe/ Task 9: **Übertragungsfunktion /Transfer function** *(ca. 3 Punkte/points)*

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$ für das System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{e}f$$

mit der Ausgangsgleichung $x = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{q}$.
Hinweis: $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{q}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \boldsymbol{a}^T \in \mathbb{R}^{1\times n}, f(t) \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}$

Calculate the transfer function $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$ for the system of second order differential equations

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{e}f$$

with the output equation $x = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{q}$.
Hint: $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{q}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \boldsymbol{a}^T \in \mathbb{R}^{1\times n}, f(t) \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}$

$$Ms^2Q(s) + RsQ(s) = eF(s)$$

$$(Ms^2 + Rs)Q(s) = eF(s)$$

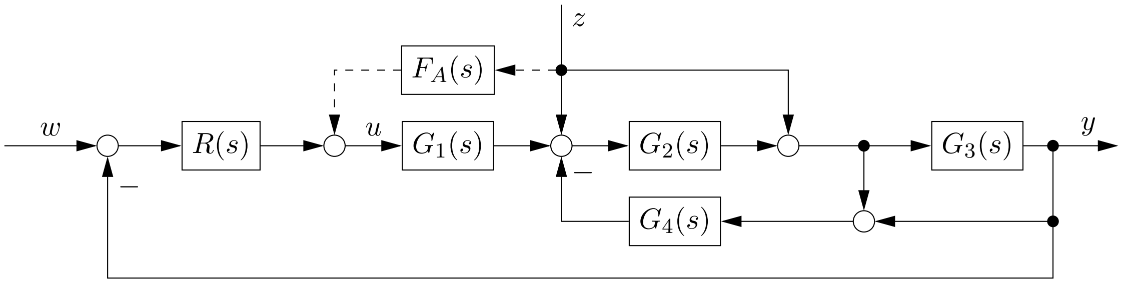
$$Q(s) = (Ms^2 + Rs)^{-1}eF(s)$$

$$X(s) = a^TQ(s) = \underbrace{a^T(Ms^2 + Rs)^{-1}e}_{G(s)}\,F(s)$$

Aufgabe/ Task 10: **Störgrößenaufschaltung /Disturbance Rejection** *(ca. 5 Punkte/points)*

Betrachtet wird das folgende System mit Führungsgröße w, Stellgröße u, Regelgröße y, Regelstrecke $G_1(s)\dots G_4(s)$ und Regler $R(s)$. Auf das System wirkt die Störgröße z, die gemessen wird. Es soll eine Störgrößenaufschaltung $F_A(s)$ entworfen werden.

Consider the following system with reference signal w, control input u, output signal y, plant $G_1(s)\dots G_4(s)$ and controller $R(s)$. The system is affected by the disturbance z, which is measured. A disturbance rejection filter $F_A(s)$ shall be designed.



a) Berechnen Sie für den offenen Regelkreis die Übertragungsfunktionen $G_{yu}(s)$ und $G_{yz}(s)$ von der Stell- bzw. Störgröße zur Regelgröße. Hier gilt $F_A(s) = 0$.

Calculate the open-loop transfer functions $G_{yu}(s)$ and $G_{yz}(s)$ from the control input and disturbance to the output. Here, $F_A(s) = 0$.

(ca. 2 Punkte/points)

Auxiliary cut v at the input to G_3:

$$v = (1+G_2)z + G_1G_2u - G_2G_4(1+G_3)v$$

$$\Rightarrow \quad G_{vu}(s)|_{z=0} = \frac{G_1G_2}{1+G_2G_4(1+G_3)}$$

$$\Rightarrow \quad G_{vz}(s)|_{u=0} = \frac{1+G_2}{1+G_2G_4(1+G_3)}$$

$$G_{yv} = G_3$$

$$\Rightarrow \quad G_{yu}(s) = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_4(1+G_3)} \qquad \text{(1P)}$$

$$\Rightarrow \quad G_{yz}(s) = \frac{(1+G_2)G_3}{1+G_2G_4(1+G_3)} \qquad \text{(1P)}$$

b) Berechnen Sie eine realisierbare Störgrößenaufschaltung $F_A(s)$ unter Verwendung der folgenden Übertragungsfunktionen. Ergänzen Sie, falls nötig, ein Filter der Form $V(s)$ (mit Begründung!).
Hinweis: Diese Aufgabe kann unabhängig gelöst werden.

Using the following transfer functions, calculate an appropriate disturbance rejection filter $F_A(s)$ that can be implemented in practice. If necessary, apply a filter of the form $V(s)$ (give reasons for this!).
Note: This task can be solved independently.

$$G_{yu} = \frac{s-2}{(s+2)(3s^2+13s-8)} \qquad G_{yz} = \frac{2s+1}{3s^2+13s-8}$$

$$V(s) = \frac{(s-a)^m}{(Ts+1)^n} \qquad T = 0.01,\ a \in \mathbb{R},\ m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

(ca. 3 Punkte/points)

$$u = F_A z$$

$$y = G_{yu}u + G_{yz}z = (G_{yu}F_A + G_{yz})z \stackrel{!}{=} 0\ \forall z$$

$$\Rightarrow \quad F_{A,\text{ideal}} = -G_{yu}^{-1}G_{yz} = \frac{(s+2)(2s+1)}{s-2} \qquad \text{(1P)}$$

$F_{A,\text{ideal}}$ is *unstable* and *violates causality*. We need to cancel the unstable pole $s_1 = 2$ with a right half-plane zero and use a second-order low-pass filter to restore causality. (1P)

$$F_A = \frac{s-2}{(s+1)^2}F_{A,\text{ideal}} = \frac{(s+2)(2s+1)}{(Ts+1)^2} = 2\frac{(s+2)(s+0.5)}{(0.01s+1)^2} \qquad \text{(1P)}$$

Aufgabe/ Task 11: Ein-Ausgangslinearisierung/ Input-output linearization

(ca. 10 Punkte/points)

a) Beschreiben Sie das Prinzip der Ein-/ Ausgangslinearisierung für Eingrößensysteme(SISO).

Describe the principle of input-output linearization for SISO systems. *(ca. 2 Punkte/points)*

Description:
control technique that works by inverting the system dynamics by applying a control law that cancels out the non-linearities of a system.
For this, the output of the system is derived till they are influenced explicitly by the input of the system. The order of that derivative is called the relative degree r of the system.

When choosing this rth derivative, it is referred to as pseudo control as control law is designed for this derivative. (2P)

Gegegeben ist das dynamische System $\dot{x} = f(x, u)$ mit den Zuständen $x = (x_1, x_2, x_3)$, u und y repräsentieren die Eingangs- und Ausgangsgrößen. Das System ist definiert durch die folgenden Gleichungen:

$$\dot{x}_1 = \sin(x_2) + (x_2 + 1)\, x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_1^5 + x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1^2 + u$$
$$y = x_1$$

Consider the dynamic system $\dot{x} = f(x, u)$ where $x = (x_1, x_2, x_3)$ represents the states, u represents the inputs, y represents the outputs as stated by the equations below:

$$\dot{x}_1 = \sin(x_2) + (x_2 + 1)\, x_3$$
$$\dot{x}_2 = x_1^5 + x_3$$
$$\dot{x}_3 = x_1^2 + u$$
$$y = x_1$$

b) Leiten Sie die Ausgangsgröße solange ab bis die Eingangsgröße explizit als Term erscheint.

Take the derivative of the output with respect to time until the input term appears explicitly. *(ca. 2 Punkte/points)*

$y = x_1$
$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin(x_2) + (x_2 + 1)\ x_3$
$\ddot{y} = (\cos(x_2) + x_3)\ \dot{x_2} + (x_2 + 1)\ \dot{x_3}$
$\ddot{y} = (x_1^5 + x_3)\ (x_3 + \cos(x_2)) + (x_2 + 1)\ (x_1)^2 + (x_2 + 1)\ u$
As can be seen the second derivative of the output is influenced by the input explicitly. (2P)

c) Notieren Sie den Zusammenhang zwischen der Pseudosteuergröße ν und der hergeleiteten Ableitung.

Write down the pseudo control ν for this derivative. *(ca. 1 Punkt/point)*

$\ddot{y} = \nu$ (1P)

d) Berechnen Sie das Regelgesetz $u = g(x, \nu)$, welches für ein lineares Übertragungsverhalten zwischen ν und y sorgt.

Calculate the control law $u = g(x, \nu)$, that linearizes the relation between ν and y. *(ca. 2 Punkte/points)*

from the earlier equation, we have
$\ddot{y} = (x_1^5 + x_3)\ (x_3 + cos(x_2) + (x_2 + 1)\ (x_1)^2 + (x_2 + 1)\ u$
therefore the input u can be computed as
$u = \frac{1}{(x_2+1)}\ [\nu - (x_1^5 + x_3)\ (x_3 + \cos(x_2) - (x_2 + 1)\ (x_1)^2]$
$u = g(x, \nu)$, where
$g(x, \nu) = \frac{1}{(x_2+1)}\ [\nu - (x_1^5 + x_3)\ (x_3 + \cos(x_2) - (x_2 + 1)(x_1)^2]$ (2P)

e) Zeichnen Sie die Struktur des Systems mit den folgenden Komponenten und heben Sie die Ein-/ Ausgangslinearisierug hervor.

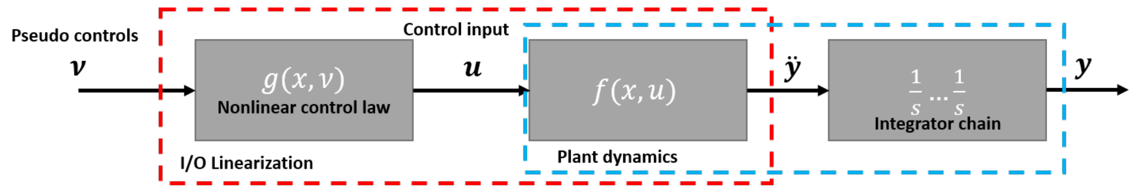
1. Pseudosteuergrößen
2. Nichtlineares Regelgesetz $u = g(x, \nu)$
3. Eingangsgrößen
4. Regelstrecke
5. Integratoren-Kette

Draw the block structure of the complete system with the following components in a diagram and highlight the I/O linearization.

1. Pseudo Controls
2. Nonlinear control law $u = g(x, \nu)$
3. Control Inputs
4. Plant Dynamics
5. Integrator Chain

(ca. 3 Punkte/points)

the points are highlighted in the figure below (3P)



Aufgabe/ Task 12: **Zeitdiskrete Regelung /Discrete Control** *(ca. 3 Punkte/points)*

Sie möchten ein zeitdiskretes Filter auf einem digitalen Mikrocontroller implementieren. Hierzu soll die zeitkontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s)$ diskretisiert und die Differenzengleichung des zeitdiskreten Filters hergeleitet werden.

For the implementation of a discrete time filter on a digital micro controller the continuous time transfer function $G(s)$ shall be discretized and the difference equation of the discrete time filter shall be derived.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20}{(s+10)}$$

a) Berechnen sie die zeitdiskrete Übertragungsfunktion $R(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$. Die Abtastfrequenz des zeitdiskreten Filters beträgt $f_T = 5$ Hz. Verwenden Sie folgende Transformationsvorschrift:

$$s = \frac{1}{T}(1 - z^{-1})$$

Derive the discrete time transfer function $R(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$. The sampling frequency of the discrete time filter is $f_T = 5$ Hz. Use the following transformation:

$$s = \frac{1}{T}(1 - z^{-1})$$

(ca. 1 Punkt/point)

$$R(z) = \frac{20}{\frac{1}{T}(1-z^{-1}) + 10} = \frac{20T}{(1-z^{-1}) + 10T}$$

$$R(z) = \frac{4}{3 - z^{-1}} = \frac{4 \cdot z}{3 \cdot z - 1}$$

b) Leiten Sie die Differenzengleichung zur Berechnung des Filterausgangssignals in der folgenden Form her:

Derive the difference equation for the computation of the filter output signal in the form:

$$y[k] = f(u[k], u[k-1], \ldots, y[k-1], \ldots)\ .$$

(ca. 1 Punkt/point)

$$R(z) = \frac{4}{3 - z^{-1}}$$
$$3 \cdot y[k] - z^{-1} \cdot y[k] = 4 \cdot u[k]$$
$$y[k] = \frac{1}{3}(y[k-1] + 4 \cdot u[k])$$

c) Auf den zeitdiskreten Filter wird zum Zeitpunkt $k = 1$ ein Einheitssprungsignal aufgeschaltet, d.h. $u[k > 0] = 1$. Der Anfangswert des Ausgangssignals y berträgt $y[k = 0] = 4$. Welchen Wert hat das Ausgangssignal $y[k]$ im Abtastschritt $k = 2$?

At the time step $k = 1$, a unit step signal is commanded at the filter input, i.e. $u[k > 0] = 1$. The initial output value of the filter is $y[k = 0] = 4$. What is the value of the filter output signal $y[k]$ at the time step $k = 2$? *(ca. 1 Punkt/point)*

$$y[0] = 4$$
$$y[1] = \frac{1}{3}(4 + 4 \cdot 1) = \frac{8}{3}$$
$$y[2] = \frac{1}{3}(\frac{8}{3} + 4 \cdot 1) = \frac{20}{9}$$

Aufgabe/ Task 13: **Kurzfragen/ Short questions** *(ca. 3 Punkte/points)*

Kreuzen Sie die richtige Antwort an.

Mark the correct answer with a cross.

a) Welches der folgenden Elemente sorgt für stationäre Genauigkeit?

Which of the following elements leads to steady-state accuracy? *(ca. 1 Punkt/point)*

Optionen / Options	Antwort / Answer
Integrator / Integrator	X
Differentiator / Differentiator	
Tiefpassfilter / Low pass filter	
Hochpassfilter / High pass filter	

b) Die Regelabweichung in einem geschlossenen Standardregelkreis ist abhängig von:

The error signals of a standard feedback control system depend on: *(ca. 1 Punkt/point)*

Optionen / Options	Antwort / Answer
Kommando- und Ausgangssignal / Command and output signal	X
Kommando- und Eingangsgröße / Command and plant input signal	
Eingangs- und Ausgangsgröße / Plant input and output variable	
Modelparameter/ Model parameters	

c) Für eine Steuerung gilt:

An open-loop control system has the following property: *(ca. 1 Punkt/point)*

Optionen / Options	Antwort / Answer
Die Eingangsgrößen sind abhängig von den Ausgangsgrößen The input variables are dependent on the output signals	
Die Eingangsgrößen sind unabhängig von den Ausgangsgrößen The input variables are independent of the output signals	X
Die Eingangsgrößen sind abhängig von der Dimension des Systems The input variables depend on the size of the system	
Die Eingangsgrößen sind abhängig von Parameters der Regelstrecke The input variables depend on plant parameters	

— Ende der Prüfung. Zusatzblätter finden Sie auf den folgenden Seiten. —
— End of the exam. Additional sheets can be found on the following pages. —

Zusatzblätter: Achten Sie auf eine eindeutige Zuordnung zu den Aufgaben!
Additional Pages: Make sure to uniquely assign the notes to a specific subtask!

Zusatzblätter: Achten Sie auf eine eindeutige Zuordnung zu den Aufgaben!
Additional Pages: Make sure to uniquely assign the notes to a specific subtask!

Zusatzblätter: Achten Sie auf eine eindeutige Zuordnung zu den Aufgaben!
Additional Pages: Make sure to uniquely assign the notes to a specific subtask!

Zusatzblätter: Achten Sie auf eine eindeutige Zuordnung zu den Aufgaben!
Additional Pages: Make sure to uniquely assign the notes to a specific subtask!

Zusatzblätter: Achten Sie auf eine eindeutige Zuordnung zu den Aufgaben!
Additional Pages: Make sure to uniquely assign the notes to a specific subtask!